２０２０年１０月入学及び２０２１年４月入学
広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

物理学プログラム

２０２０年 8月２７日　　９：００ ～ １２：００

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配付されている。
   - 問題用紙（本表紙を含む。）　５枚
   - 解答用紙　４枚
   - 下書き用紙　１枚
2. 問題は[I]～[IV]の４問である。全ての問題に解答せよ。
3. 問題ごとにそれぞれの解答用紙に解答せよ。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は，表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。
4. 解答用紙及び下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には，全ての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

[I] 力学

速度 $\boldsymbol{v_A}$ で入射された粒子 A (質量 m_A) が静止している標的粒子 B (質量 m_B) に弾性衝突する場合を考える。衝突後の粒子 A 及び，粒子 B の速度を $\boldsymbol{v'_A}$，$\boldsymbol{v'_B}$ とし，それぞれの散乱角 θ_A，θ_B は図 1 に示すように衝突前の粒子 A の進行方向に対する角度として定義する。この系を実験室系と呼ぶ。粒子 A，B の運動は全て非相対論的であるとし，以下，$|\boldsymbol{v_A}| = v_A$，$|\boldsymbol{v'_A}| = v'_A$，$|\boldsymbol{v'_B}| = v'_B$ とする。

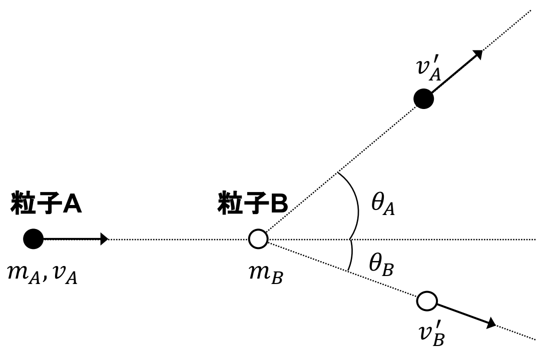

図1：実験室系

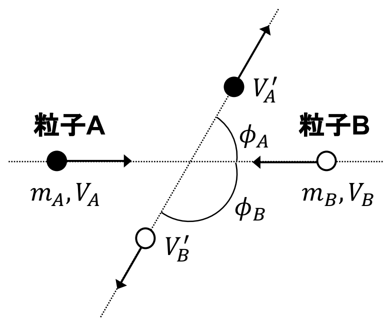

図2：重心系

(1) 実験室系における衝突前後のエネルギー保存及び運動量保存を表す式を示せ。

(2) v'_A と v'_B の間の関係を m_A，m_B，$\theta_A + \theta_B$ のみで表せ。

(3) 次に同じ衝突を図 2 に示す重心系で考える。重心系における衝突前の粒子 A，B の速度をそれぞれ $\boldsymbol{V_A}$，$\boldsymbol{V_B}$，衝突後の速度を $\boldsymbol{V'_A}$，$\boldsymbol{V'_B}$，散乱角を ϕ_A，ϕ_B とする。この時，$\boldsymbol{V_A}$，$\boldsymbol{V_B}$ を $\boldsymbol{v_A}$，m_A，m_B を用いて表せ。

(4) 重心系における粒子 A，B の衝突前後の速度の大きさが $V_A = V'_A$，$V_B = V'_B$ となることを示せ。

(5) 実験室系と重心系における入射粒子 A の散乱角 θ_A と ϕ_A との関係を導出せよ。その関係から，θ_A と ϕ_A が同程度になるのはどのような場合かを論ぜよ。

(6) 実験室系における衝突前の粒子 A の運動エネルギーを T_A，衝突後の粒子 B の運動エネルギーを T'_B とする。比 T'_B/T_A を m_A，m_B，ϕ_B を用いて表せ。この比が最大となるのは m_A，m_B がどのような場合かを論ぜよ。

[II] 電磁気学

図1のように，半径a，厚さd，誘電率εのディスク状誘電体を二枚の導体円板ですき間なくはさんだコンデンサーに，振幅V_0，角振動数ωで時間tとともに変動する正弦波の交流電源$V(t) = V_0 \sin \omega t$をつなぐ。

aに比べてdは十分に小さく，極板の端での電流の乱れやεの周波数依存性はないものとして，以下の各問いに答えよ。

(1) コンデンサーの静電容量を求めよ。

(2) 極板間に生じる変位電流密度を求めよ。

(3) 誘電体内の中心から半径rの位置における磁場を求めよ。

(4) 誘電体の側面$(r = a)$におけるポインティングベクトルを求めよ。

(5) 時間tにコンデンサーに蓄えられているエネルギー$U(t)$を求めよ。

(6) コンデンサーに蓄えられているエネルギーの時間変化$\dfrac{dU(t)}{dt}$とポインティングベクトルの関係式を書け。また，この関係式が表す物理的意味を説明せよ。

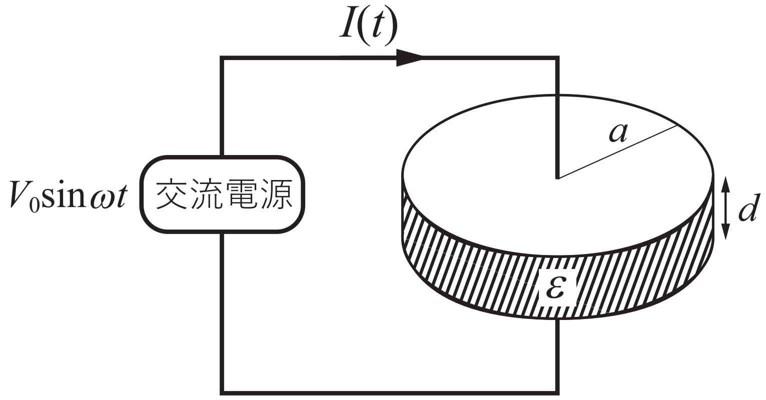

図 1:

[III] 量子力学

ポテンシャルの値が座標領域 $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ ではゼロで，その端点では無限大となる領域に閉じ込められた粒子の一次元の量子系を考える。ただし，粒子の質量を m，プランク定数を $h = 2\pi\hbar$ とする。

(1) この系のエネルギー固有値 E_n と対応する波動関数 $\phi_n(x)$ を求めよ。ここで，n は自然数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であり，$E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ を満たす。関数 $\phi_n(x)$ を n が奇数と偶数の場合に分けて求め，正規直交化すること。

(2) 時刻 $t = 0$ の状態が以下で与えられる $\Psi(x, 0)$ であるとき，時刻 t における状態 $\Psi(x, t)$ を求めよ。式は E_1，E_2，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$ 等を用いてよい。

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$$

(3) (2) の初期状態に対する，粒子の位置の期待値 $\langle x \rangle$ を時刻 t の関数として，a，m，$\hbar$ 等を用いて表わせ。ただし，次の定積分を用いてよい。

$$\int_0^{\pi/2} \theta \cos(\theta) \sin(2\theta) d\theta = \frac{4}{9}$$

[IV] 熱・統計力学

質量 m，固有角振動数 ω の調和振動子のハミルトン関数 H は，座標を x，運動量を p として，

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

と表される。以下の問いに答えよ。

(1)　調和振動子のエネルギーが ε であるとき，方程式 $H(p,x) = \varepsilon$ は位相空間において楕円を示す。エネルギー ε 以下の楕円で囲まれる位相空間の面積を求めよ。

(2) 絶対温度を T，ボルツマン定数を k_{B} とし，1 個の振動子の分配関数を，古典的な場合と量子論的な場合に分け，それぞれを求めよ。ただし，次の公式を用いてよい。

$a > 0$ となる実数に対しての定積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$|a| < 1$ となる実数に対しての無限等比級数の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

(3) (2) で求めた古典的な場合と量子論的な場合の分配関数の関係について論ぜよ。

(4)　独立した N 個の振動子から成る系を考えた場合の分配関数を量子論的に求めよ。

(5) (4) の場合のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。